FORMULAIRE DE TRIGONOMÉTRIE&EXERCICES&DM

A) Formulaire

1) Addition d'angles

$$\mathbf{Cos(a+b)=Cos(a)Cos(b)-Sin(a)Sin(b)}$$

$$\mathbf{Sin(a+b)=Sin(a)Cos(b)+Sin(b)Cos(a)}$$

—1ère démo, par changement de base : Soit une base $(\vec{i},\vec{j})$ orthonormée.

Considérez les vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{u}'$ de normes 1 tels que $(\vec{i},\vec{u})=a\ [2\pi]$, $(\vec{u},\vec{v})=b\ [2\pi]$ et $(\vec{u},\vec{u}')=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Dessin :

Écrire les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$:

Puis les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{u},\ \vec{u}')$:

En déduire les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

En remarquant que $(\vec{i},\vec{v})=(a+b)\ [2\pi]$, écrire une nouvelle expression des coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$. Conclure.

—2ème démo par l'exponentielle complexe : calculer $e^{ia}\times e^{ib}$. Conclure.

2) Soustraction d'angles : compléter :

Cos(a-b)=

Sin(a-b)=

3) Tangente (on rappelle que tan=sin/cos): Déduire de ce qui précède :

$$\textbf{Tan(a+b)=}\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \qquad \text{et} \qquad \textbf{Tan(a-b)=}\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

4) Formules de dédoublement :

Prouver : **Cos(2a)**=$2\text{Cos}^2(a) - 1 = 1 - 2\text{Sin}^2(a)$ et **Sin(2a)**=2 Sin(a) Cos(a)

…d'abord en utilisant les formules précédentes, puis grâce à l'exponentielle complexe.

5) Tangente : Prouver **Tan(2a)**= $\frac{2\tan(a)}{\overset{2}{1-\tan(a)}}$

6) Formules de produits (ou de « linéarisation) de sin et cos : Compléter en fonction de cos(a+b), cos(a-b), sin(a+b), sin(a-b) et cos(2a) :

Cos(a)Cos(b)=

Sin(a)Sin(b)=

Sin(a)Cos(b)=

Cos^2(a)= **Sin^2(a)=**

7) <u>Sommes de cos et de sin</u> Démontrer : *(indication : poser p=a+b et q=a-b)*

$$\mathbf{Cos(p)+Cos(q)=2Cos}\left(\frac{p+q}{2}\right)\mathbf{Cos}\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \mathbf{Cos(p) - Cos(q)=-2Sin}\left(\frac{p+q}{2}\right)\mathbf{Sin}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\mathbf{Sin(p)+Sin(q)=2Sin}\left(\frac{p+q}{2}\right)\mathbf{Cos}\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \mathbf{Sin(p) - Sin(q)=2Cos}\left(\frac{p+q}{2}\right)\mathbf{Sin}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

B) EXERCICES

1) Résoudre dans R : a) Cos(x)=Cos(y) b) Sin(x)=Sin(y) c) Tan(x)=Tan(y)

2) Soit un entier (fixé) $n\in\mathbb{N}^*$, résoudre dans $]0\,;\,\pi[$ l'équation $\text{Cos}(n\theta)=0$ et déterminer le nombre exact de solutions.

3) Soit (a ; b) un couple de réels non tous deux nuls. On pose $r=\sqrt{a^2+b^2}$. Prouvez qu'il existe un unique $\alpha\in[0\,;\,2\pi]$ tel que $\text{Cos}(\alpha)=a/r$ et $\text{Sin}(\alpha)=b/r$.

4) Résoudre dans R les équations trigonométriques suivantes :

a) $2\text{Cos}(2x+\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}$

b) $\text{Sin}^2(x)=\text{Cos}^2(x)$

c) $\text{Sin}(x)\leq -\frac{1}{2}$

d) $\text{Tan}(x)\leq 1$

C) DM

1) Formules d'angle moitié (&alia) : Démontrez à l'aide du formulaire de trigonométrie :

a) $\left|\mathrm{Cos}\left(\frac{a}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1+\mathrm{Cos}(a)}{2}}$ b) $\left|\mathrm{Sin}\left(\frac{a}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1-\mathrm{Cos}(a)}{2}}$ c) $\mathrm{Tan}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\mathrm{Sin}(a)}{1+\mathrm{Cos}(a)}$

2) Formules dites d'arc moitié :

On pose **t=Tan(a/2)** ; prouver à l'aide des formules précédentes *(indication : $1/\cos^2=1+\tan^2$)* :

Cos(a)=$\frac{1-t^2}{1+t^2}$ **Sin(a)=**$\frac{2t}{1+t^2}$ **Tan(a)=** $\frac{2t}{1-t^2}$

3) Soit (a ; b) un couple de réels non tous deux nuls

a) Prouvez qu'il existe un unique $\alpha \in [0\,;2\pi[$ tel que $\mathrm{Cos}(\alpha)=a/r$ et $\mathrm{Sin}(\alpha)=b/r$ avec $r=\sqrt{a^2+b^2}$

b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $a\,\mathrm{Cos}(x)+b\,\mathrm{Sin}(x)=r\,\mathrm{Cos}(x-\alpha)$

c) Résoudre dans R $\mathrm{Cos}(2x) - \sqrt{3}\,\mathrm{Sin}(2x)=1$

4) Résoudre dans R les équations trigonométriques suivantes :

a) $[\mathrm{Cos}^2(x) - \frac{3}{4}]\,[\mathrm{Sin}^2(x+\frac{\pi}{3}) - \frac{1}{2}]=0$

b) $\mathrm{Cos}(2x)\geq 0$

c) $\mathrm{Tan}(x+\frac{\pi}{4})>-1$

d) $2\mathrm{Cos}^2(x)+3\mathrm{Cos}(x)+1=0$

e) $\mathrm{Sin}^2(x)+3\mathrm{Cos}(x)-1<0$

f) $\mathrm{Sin}^2(2x+\frac{\pi}{6})=\mathrm{Cos}^2(x+\frac{\pi}{3})$

g) $\tan(x)+\tan(2x)=\tan(3x)$

h) $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)=0$

5) En utilisant les formules de trigonométrie, exprimer cos(3x) en fonction de puissances de sin(x) et cos(x) (« anti-linéarisation »)

6) a) Quelles sont les images directes, par la fonction sin, de $\mathbb{R}$? de $[0,2\pi]$? de $[0,\pi/2]$?

b) Quelles sont les images réciproques, par cette même fonction, de [0,1] ? de [3,4] ? de [0,1/2] ?

CHAPITRE II Nombres complexes Rappels Polynômes Compléments

A) Rappels

Un nombre complexe est un nombre qui s'écrit sous la forme $z = a + i\,b$ où a et b sont des réels (forme algébrique du nombre complexe).

a s'appelle la **partie réelle** de z et b la **partie imaginaire** de z. On les note : $a = \mathrm{Re}\,(z)$, $b = \mathrm{Im}\,(z)$.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un **corps commutatif**.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit le conjugué de z, noté $\bar{z}$ par : $\bar{z} = a - i\,b$. L'application qui à z associe son conjugué est une bijection involutive ($\bar{\bar{z}}$=z).

De plus, $\forall\ (u, v) \in \mathbb{C}^2$, $\overline{u+v} = \bar{u} + \bar{v}$, $\overline{u.v} = \bar{u}.\bar{v}$, $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}}$ si $v \neq 0$.

On a facilement : $\boxed{\mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}}$ et $\boxed{\mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2\,i}}$.

On définit le **module** de $z \in \mathbb{C}$ comme le réel positif $r = |\,z\,| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z.\bar{z}}$.

Prop : $|\,z\,|^2 = z.\bar{z}$ $\qquad \forall\ (u, v) \in \mathbb{C}^2$ |uv|=|u|.|v|

si $v \neq 0$, $\left|\dfrac{u}{v}\right| = \dfrac{|\,u\,|}{|\,v\,|}$ $\qquad |z| = 1 \iff \bar{z} = \dfrac{1}{z}$.

Prop : |Re(z)| ⩽|z|, égalité ssi z∈ℝ

|Im(z)|⩽|z|, égalité ssi z∈iℝ (z imaginaire pur)

⟦ Démo :

⟧

Rq : $\forall u, v \in \mathbb{C}$, $|u+v|^2 = ...$

Thm : Inégalité triangulaire : $|\,u+v\,| \leqslant |\,u\,| + |\,v\,|$, égalité ssi u=0 ou v=0 ou arg(u)=arg(v) [2π]

⟦ Démo :

Autre forme de l'égalité triangulaire : $\boxed{\forall u, v \in \mathbb{C},\ ||u| - |v|| \leqslant |u - v|}$

⟦ Démo en exercice *(Indication : pour a et b réels, |a|⩽b ssi -b⩽a ⩽+b ; puis utiliser l'inégalité triangulaire pour démontrer chacune des deux inégalités ; ruse u=(u-v)+v et v=(v-u)+u)*

⟧

Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Ainsi, son conjugué s'écrit $\overline{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$.

Il en résulte que : $\boxed{\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$ et $\boxed{\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$ (Formules d'Euler)

puis que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}}$, ce qui s'écrit encore $\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$ (Formule de Moivre)

⟦ Démo :

⟧

Rq : Tout complexe z de module 1 admet une écriture z=e$^{i\theta}$, mais attention, si U est l'ensemble des complexes de module 1 ("cercle unité"), l'application $\left|\begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow U \\ \theta \longmapsto e^{i\theta}\end{array}\right.$ est surjective mais non injective.

Rq: $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \Longleftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$ ⟦ ⟧

Complexes de modules différents de 1 : Tout nombre complexe non nul s'écrit sous la forme $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ où $r > 0$ désigne le module de z et θ un **argument** de z : θ est définit à 2π près. On le choisit souvent entre $-\pi$ et π ou entre 0 et 2π.

On a donc : $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$.

Un nombre complexe z est **réel** si et seulement si : $\mathrm{Im}(z) = 0$ ou $\bar{z} = z$ ou $\arg(z) \equiv 0\ [\pi]$

(Remarque : $z > 0$ ssi $\arg(z) \equiv 0\ [2\pi]$ et $z < 0$ ssi $\arg(z) \equiv \pi\ [2\pi]$).

Un nombre complexe est **imaginaire pur** si et seulement si : $\mathrm{Re}(z)=0$ ou $\bar{z}=-z$ ou $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Formules sur les arguments :

$\boxed{\forall z,z'\in\mathbb{C}^*,\ \arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')[2\pi],\ \arg(z.z')=\arg(z)+\arg(z')[2\pi]}$,

et par récurrence $\boxed{\forall n\in\mathbb{Z}\ \arg(z^n)=n\arg(z)[2\pi]}$

Ruse de factorisation par l'angle moyen :

$e^{ix}+e^{iy}=...$

$e^{ix}-e^{iy}=...$

$1+e^{ix}=$

$1-e^{ix}=$

Affixe d'un point du plan

A tout point $M\ (x,y)$ du plan, on associe le nombre complexe $z=x+i\,y$ appelé **affixe** du point M.

On a de plus : $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|=|z|=r$ et une mesure de l'angle $\left(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM}}\right)$ est l'argument de z : on écrira $\boxed{\left(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM}}\right)=\theta}$ si θ est l'argument de z.

De façon plus précise, $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$: le couple (r,θ) sont les **coordonnées polaires** du point M. L'angle θ s'appelle l'**angle polaire** du point M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

- Si $M(u)$ et $N(v)$ sont deux points du plan, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MN}$ est égale à $v-u$.

- L'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|z-a|=|z-b|$ est la médiatrice du segment $[A(a),B(b)]$.

- L'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|z-a|=r>0$ est le cercle de centre $A(a)$ et de rayon r.

- Trois points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement s'il existe un réel k tels que : $\overrightarrow{AC}=k\,\overrightarrow{AB}$. Cela se traduit au niveau des affixes par : $\exists k\in\mathbb{R},\ (c-a)=k(b-a)$ ou encore que **le nombre complexe** $\frac{c-a}{b-a}$ **est réel**.

Interprétation géométrique du rapport $\frac{c-a}{b-a}$ ("outil géométrique fondamental")

Racines carrées d'un nombre complexe

La fonction réelle notée par $\sqrt{\ }$ n'existe pas sur $\mathbb{C}$, néanmoins :

Thm : tout nombre complexe Z admet deux « racines carrées », opposées, $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$ telles que $z_1^2=z_2^2=Z$ et $z_1 = -z_2$; si $Z\in \mathbb{R}^+$ alors $z_1 = \sqrt{Z}$ et $z_2 = -\sqrt{Z}$.

⟦Démo :

⟧

Equations du second degré à coefficients réels

L'équation du second degré $a\,z^2 + b\,z + c = 0$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, avec $\Delta = b^2 - 4\,a\,c < 0$, possède dans $\mathbb{C}$ exactement deux racines conjuguées (CAS a, b, c RÉÈLS !). Elles s'écrivent : $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2\,a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2\,a}$ où $\omega = i\,\sqrt{-\Delta}$ est l'un des deux nombres complexes vérifiant : $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4\,a\,c$.

Ex : Résoudre $2x^2-3x+4=0$, puis factoriser $2X^2-3X+4$

Rq : cas $ax^2+bx+c=0$ avec a, b, c non réels hors programme, mais pas très différent. Soit par exemple à résoudre $x^2+(1-i)x-i=0$

Les formules de François Viète :

x_1 et x_2 solutions complexes ou réelles de $x^2-Sx+P=0$ ssi $x_1+x_2=S$ et $x_1.x_2=P$

Ex : Écrire une équation de solutions -3 et 2

Ex : Résoudre $\begin{cases} x+y &= 5 \\ xy &= 3 \end{cases}$

B) COMPLÉMENTS … SUR LES RAPPELS : LINÉARISATIONS ET CALCUL DE SOMMES TRIGONOMÉTRIQUES

I) LINÉARISATION DES EXPRESSIONS TRIGONOMÉTRIQUES

But : Transformer des produits et puissances de Cos x et Sin x en sommes de Cos(kx) et Sin(kx).

⟹Méthode : Formules d'Euler et Binôme de Newton : $\text{Cos}^n x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n$ et $\text{Sin}^n x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n$

Rappel : $(a+b)^2=$ $(a+b)^3=$ $(a+b)^n=$

Ex 1 : linéariser $\text{Cos}(x).\text{Sin}^2(x)$

⟹Méthode : à partir de la formule de Moivre et du binôme de Newton on effectue la transformation inverse (« anti-linéarisation ») :

Ex 2 : $\text{Cos}(3x)=\text{Re}[e^{i3x}]=\text{Re}[(e^{ix})^3]=$

II) CALCUL DES SOMMES TRIGONOMÉTRIQUES

Sommes du type Σ Cos(kx), Σ (1/k)Sin(kx), Σ Tan(θ_k), etc…

⟹Méthode : $\cos(kx)=\text{Re}[e^{ikx}]$, etc… On calcule donc d'abord $\Sigma\, e^{ikx}$, ou $\Sigma k e^{ikx}$ (souvent en utilisant la somme des termes d'une suite géométrique), puis on prend la partie réelle, ou imaginaire, du résultat… Voir exercices.

C) POLYNÔMES

Dans tout ce qui suit $\mathbb{K}$ est un corps, c'est-à-dire un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication, tel que tout élément a dans $\mathbb{K}$ un opposé pour l'addition (opposé de x : -x), et tout élément non nul a un inverse (inverse de x : 1/x) ; les éléments d'un corps sont appelés « scalaires ». En pratique (programme ECS1), $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Rq : $\mathbb{N}$, Z, ne sont pas des corps, car leurs éléments n'admettent pas tous un inverse.

I) GÉNÉRALITÉS SUR $\mathbb{K}[X]$

Déf/Voc : Une fonction $P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ est un polynôme ssi il existe un entier $n\in\mathbb{N}$ et (n+1) scalaires $a_0, a_1, a_2,\ldots, a_n\in\mathbb{K}$, tels que, $\forall x\in\mathbb{K}$, $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$.

Si $a_n\neq0$ alors P est dit de degré n ; a_nX^n est son terme dominant et a_n son coefficient dominant. Si $a_n=1$ on dit que P est unitaire. a_0 est le terme constant. Chaque a_kX^k est un monôme de P.

Thm : Les coefficients d'un polynôme sont uniques : deux polynômes P et Q sont égaux (càd $\forall x\in\mathbb{K}$, $P(x)=Q(x)$) ssi leurs coefficients sont égaux.

Rq1 : Un polynôme P(x) étant défini, x peut être substitué par d'autres objets mathématiques que des nombres réels et complexes, en fait x peut être pris dans tout ensemble dont les éléments peuvent être multipliés entre eux, additionnés, et multipliés par des scalaires ; les ensembles dont les éléments acceptent ces types d'opérations sont appelés des « algèbres ». Ex : avec $P=1+X^2-3{,}5X^7$; $P(i)=1+i^2-3{,}5i^7$; si M matrice carrée P(M)= … ; si f fonction P(f)= … (avec $f^k=f\circ f\circ\ldots\circ f$ OU, moins souvent $f\times f\times\ldots\times f$) ; si Q polynôme P(Q)= …

Pour cette raison, le « x » étant habituellement réservé aux nombres, on note souvent $a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_nX^n$ un polynôme à une indéterminée X. D'où la

Notation : On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée (variable) à coefficients dans $\mathbb{K}$, càd l'ensemble des $P=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, avec $(a_0, a_1, a_2,\ldots, a_n)\in\mathbb{K}^n$.

Rq2: Polynôme à deux indéterminées : $P(X,Y)=X^2+XY^3-3Y+1$

Déf : le polynôme nul est le polynôme $P\in\mathbb{K}[X]$ tel que $\forall x\in\mathbb{K}$, $P(x)=0$; par unicité des coefficients, c'est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls. On le note **0** ou **Θ**.

1) Structure de $\mathbb{K}[X]$:

Les polynômes peuvent s'ajouter et se multiplier entre eux, + et × sont commutatives, associatives et × est distributive sur +, tout polynômes P a un opposé (-P), MAIS PAS D'INVERSE POUR × (si $P\in\mathbb{K}[X]$, on peut former 1/P mais ce n'est pas un élément de $\mathbb{K}[X]$) : **$\mathbb{K}[X]$** n'est pas un corps, mais un anneau commutatif.

Rq : autres exemples d'anneaux : —$\mathbb{Z}$ —l'ensemble des matrices carrées (anneau non commutatif) —l'ensemble des applications d'un ensemble E vers E pour la loi « o ».

Enfin les polynômes éléments de $\mathbb{K}[X]$ peuvent être multipliés par des scalaires (éléments de $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) : $\mathbb{K}[X]$ est non seulement une anneau mais aussi une algèbre commutative.

Résumé structures sur un ensemble (±HP, mais pour replacer dans un tout) :

- Anneaux une addition commutative et une multiplication (qui ne l'est pas forcément), tout élément a un opposé pour + mais pas toujours d'inverse pour ×
- Corps : une addition et une multiplication, tout élément a un opposé et (sauf 0) un inverse pour ×
- Algèbre : une addition + et une multiplication × (une algèbre est donc aussi un anneau ou un corps) et une multiplication externe par un scalaire

2) Règles de calcul sur les polynômes

Les mêmes que dans tout autre anneau commutatif tel que $\mathbb{Z}$.

Rappel produit de polynômes : $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{p} b_j X^j\right)=\sum_{k=0}^{n+p} c_k X^k$ avec $c_k=\sum_{\substack{0\le i\le n\\ 0\le j\le p\\ i+j=k}} a_i b_j$

Ex 3 : $P= b_0+b_1X+b_2X^2+ b_3X^3$ et $Q= a_0+a_1X+a_2X^2$

PQ=

Ex 4 : $(aX^2+bX+c)^2=$

Ex 5 : $(X-a)(X-b)(X-c)=$

Ex 6 : $(X-a)(X-b)(X-c)(X-d)=$

Composition de deux polynômes, exemples : $P=-X+1$, $Q=2X^2-3X+2$

Une propriété supplémentaire de l'anneau $\mathbb{K}[X]$: intégrité

Si $P,Q\in\mathbb{K}[X]$ et $PQ=0$ (càd $\forall x\in\mathbb{K}$ $P(x)\times Q(x)=0$; ou encore tous les coefficients de $P\times Q$ sont nuls) alors $P=0$ ou $Q=0$: $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre

Rq : $\mathbb{Z}$ est aussi un anneau intègre, mais l'anneau des matrices carrées ne l'est pas (on peut avoir $M_1M_2=0$ avec matrices $M_1\neq 0$ et $M_2\neq 0$), ni l'anneau des applications à valeurs dans $\mathbb{K}$: (on peut avoir $f\times g=0$ avec des applications non nulles).

3) Degrés :

Thm/déf : deg(P)=0 ssi P=cste$\in\mathbb{K}^*$

Convention : le degré du polynôme nul est $-\infty$

Thm : soient $P,Q\in\mathbb{K}[X]$ tels que deg(P)=n et deg(Q)=p. Alors :

deg(P+Q)≤max[deg(P),deg(Q)] ; si deg(P)≠deg(Q) alors deg(P+Q)=max[deg(P),deg(Q)].

$\forall k\in\mathbb{K}^*$ deg(kP)=deg(P)

deg(PQ)=deg(P)+deg(Q)

deg(PoQ)=deg(p)×deg(Q)

Déf : On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieurs ou égaux à n. $\mathbb{K}_n[X]\subset\mathbb{K}[X]$.

4) Arithmétique

Identique à celle de l'anneau intègre $\mathbb{Z}$: multiples, diviseurs, bezout, Gauss, pgcd…

Déf : Soient $D,M\in\mathbb{K}[X]$; M est un multiple de D (ou bien D est un diviseur de M) ssi il existe $Q\in\mathbb{K}[X]$ tel que $M=Q\times D$.

Rq :

- toute constante $k\in\mathbb{K}^*$ divise tout polynôme ; ex π divise $2X^2+(1/2)X-1$
- tout multiple d'un polynôme par une cste $k\in\mathbb{K}^*$ est à la fois un diviseur et un multiple de ce polynôme; ex 2X+6 divise X+3 et 2X+6 est un multiple de X+3.

Thm : la divisibilité est transitive : si P divise Q et Q divise R alors P divise R.

Thm : si P divise Q et deg(P)=deg(Q) alors P=kQ où $k\in\mathbb{K}^*$.

[[démo :

]]

Division euclidienne des polynômes :

Thm : Soient $A,B\in\mathbb{K}[X]$ tels que $B\neq\Theta$. Alors il existe un unique couple $(Q,R)\in K[X]^2$ tel que $A(X)=B(X)\times Q(X)+R(X)$ et deg(R)<deg(B). Q est appelé quotient et R est reste de la division euclidienne de A par B.

Ex7 : division euclidienne de $2X^2+X+1$ par (X-1) ?

Déf : Polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$: Un polynôme $P\in K[X]$ est dit irréductible lorsqu'il est non constant et lorsque ses seuls diviseurs sont les kP avec $k\in\mathbb{K}^*$, ainsi que les polynômes constants non nuls.

Rq1 : Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ sont homologues des nombres premiers dans $\mathbb{Z}$. Pourquoi alors ne peut-on dire d'un polynôme irréductible que « ses seuls diviseurs sont lui même et 1 » ? Parce que toutes les constantes non nulles divisent un polynôme, et tous ses multiples par un scalaire non nul aussi.

Rq2 : / !\ la propriété « d'être irréductible », pour un polynôme, dépend du corps $\mathbb{K}$ considéré ; ex : X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$.

⟦ Preuve :

Thm : si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ou tout autre corps, ou certains autres anneaux…), tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ se décompose en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$; cette décomposition est unique à un facteur constant près.

$\forall P\in\mathbb{K}[X]$, $\exists Q_1, Q_2,\dots, Q_p$ irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $P=Q_1\times Q_2\times\dots\times Q_p$.

En rassemblant les facteurs identiques : $P=\prod_{k=1}^{r} Q_k^{m_k}$; m_k est appelé ordre de multiplicité de Q_k dans la décomposition de P en facteurs irréductibles.

Prop : $\forall k$, $Q_k^{m_k}$ divise P mais $Q_k^{m_k+1}$ ne le divise pas.

$\deg(P)=m_1\times\deg(Q_1)+m_2\times\deg(Q_2)+\dots+m_r\times\deg(Q_r)$

/ !\ Les facteurs irréductibles de P sont les Q_k, pas les $Q_k^{m_k}$.

⟹Méthode Un polynôme P divise un polynôme Q ssi tous les facteurs irréductibles de P, élevés à leur ordre de multiplicité, sont des facteurs irréductibles de Q.

Ex 8 : Montrer que X^3+2X^2+X divise $X^5+3X^4+4X^3+3X^2+X$ (2 méthodes)

Rq (déf HP) : lorsque deux polynôme n'ont aucun facteur irréductible commun (à la multiplication par une constante près), on dit qu'ils sont premiers entre eux.

5) Racines

Rappel/déf : a est une racine d'un polynôme P ssi P(a)=0, ssi (X-a) divise P, ssi il existe $Q\in\mathbb{K}[X]$ tel que $P=(X-a)Q$.

Si $(X-a)^m$ divise P et $(X-a)^{m+1}$ ne divise pas P alors on dit que a est racine de multiplicité m de P.

Thm (autre caractérisation de la multiplicité) : a est racine de P de multiplicité m ssi $P=(X-a)^mQ$ avec $Q\in\mathbb{K}[X]$ et $Q(a)\neq 0$.

Déf : Une racine de multiplicité 1 d'un polynôme est appelée racine simple ; de multiplicité 2, racine double, etc… En général si multiplicité>1, racine multiple.

Thm : Si $a_1,a_2,\dots,a_n$ sont racines de P de multiplicités respectives $m_1,m_2,\dots,m_n$ alors $\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)^{m_k}$ divise P, les $(X-a_k)$ sont les facteurs de degré 1 de la décomposition de P en facteurs irréductibles.

⟹Méthode : Déterminer les racines d'un polynôme permet de déterminer les facteurs de degré 1 de sa décomposition en facteurs irréductibles.

Ex 9 : Décomposer $P=2X^3-(5+6i)X^2+9iX+1-3i$ dans $\mathbb{C}[X]$ sachant qu'il possède une racine réelle.

Conséquences : Nombre de racines

Thm : Un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}$ admet au plus n racines (comptées avec leur ordre de multiplicité).

Thm : Si un polynôme supposé de degré $n\in\mathbb{N}$ admet strictement plus de n racines (comptées avec leur ordre de multiplicité), alors il est le polynôme nul.

⟹Méthode : Pour démontrer qu'un polynôme P est nul, on peut prouver, au choix :

- que tous ses coefficients sont nuls
- que $\forall x\in\mathbb{K}\ P(x)=0$
- que le nombre de racines de P, comptées avec leur ordre de multiplicité, est strictement plus grand que le degré supposé de P
- que le nombre de racines de P est infini
- que $\deg(P)<0$

⟹Méthode : Pour démontrer l'égalité de deux polynômes P et Q, on peut prouver, au choix :

- que $\forall x \in \mathbb{K}$, $P(x)=Q(x)$
- que tous leurs coefficients sont égaux
- que $(P-Q)$ est le polynôme nul (méthodes ci-dessus)

Rq (importante) :
Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine d'un polynôme P à coefficients réels, alors $\bar{\alpha}$ est aussi racine de P.

⟦Démo :

Ex 10 : Déterminer un polynôme réel de degré 2 dont $1+i$ est une racine.

Rq : En général, $(X-z)(X-\bar{z})=$

Conséquences : racines et diviseurs

Thm : Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et P divise Q, alors les racines de P sont aussi racines de Q.

⟦Démo :

/ ! \ La réciproque n'est pas vraie en général : les racines de P peuvent être des racines de Q sans que P divise Q. Contre-exemple dans $\mathbb{R}[X]$: $P=X(X-1)(X^2+1)$ et $Q=X^3-X$.

Def : un polynôme est dit scindé ssi tous ses facteurs irréductibles sont de degré 1 ; il est dit simplement scindé ssi de plus les multiplicités des racines sont toutes égales à 1.

Ex : $(X-i)(X+i)^2$ scindé, $(X+2)(X-1-i)$ simplement scindé

⟹Méthode/Thm : si P simplement scindé alors P divise Q ssi toutes les racines de P sont des racines de Q.

Ex 11 : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, le polynôme $A=X^2-X+1$ divise le polynôme $P_n=(X-1)^{n+2}+X^{2n+1}$

II) Résultats spécifiques à $\mathbb{C}[X]$

1) Thm de d'Alembert-Gauss et conséquences :

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1 ; tout polynôme se décompose donc en produit de polynômes de degré 1, autrement dit tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

Pour tout polynôme non constant $P\in\mathbb{C}[X]$, il existe n racines complexes $a_1, a_2, \dots, a_n$, et n entiers $m_1, m_2, \dots, m_n$, leurs ordres de multiplicités, tels que $P=C\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)^{m_k}$, où C est le coefficient dominant de P. De plus, $\deg(P)=\sum_{k=1}^{n} m_k$.

/ ! \ Les facteurs irréductibles de P sont les $(X-a_k)$, et non les les $(X-a_k)^k$.

$\Longrightarrow$Méthode : Si l'on obtient pour un polynôme un nombre de racines égal au degré, alors nécessairement chaque racine est de multiplicité 1.

$\Longrightarrow$Méthode / Ruse : Avec les notations ci-dessus, $P(0)=C\prod_{k=1}^{n}(-a_k)^{m_k}$.

Ex 12 : Décomposer $Q=15X^4+2X^2-1$ en produit de polynômes irréductibles.

2) Équations polynômiales dans $\mathbb{C}$

Toute équation polynômiale de degré n dans $\mathbb{C}$ admet une factorisation en n polynômes irréductibles (de degré 1, type aX+b) : elle admet donc au plus n solutions distinctes.

3) Cas particulier des équations $Z^n=1$ (Racines n-ièmes de l'unité)

a) Les fonctions réelles racines n-ièmes de R^+

Pour $n\in N^*$, la fonction $f_n : \begin{cases} R^+ \to R^+ \\ x \to x^n \end{cases}$; strictement croissante, définit une bijection, on note sa réciproque $\sqrt[n]{\ }$.

Ex : $\sqrt[3]{27} =$ $\sqrt[5]{32} =$ $\sqrt[4]{0,0625}$

b) Racines n ièmes de l'unité : solutions complexes de $Z^n=1$

Rq : trivial dans ℝ : 1, -1 selon parité de n

Dans C : exactement n solutions.

[Démo : i) CN (candidats solutions)

ii) CS (réciproque)

iii) Combien de solutions distinctes ?

]

Thm : Pour $n\in\mathbb{N}^*$ l'équation $Z^n=1$ a exactement n solutions, les $\omega_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k\in\{0 ; 1 ; 2 ; \; ; n-1\}$
Ces nombres sont appelés « racines n-ièmes de l'unité ».

Prop (HP mais à savoir redémontrer) : (i) les ω_k sont de module 1 (ii) les w_k sont conjugués deux à deux : $\omega_{n-k}=\overline{\omega_k}=\frac{1}{\omega_k}$ (iii) $\omega_k\times\omega_{k'}=\omega_{k+k'}$ (iv) Pour $n\geq 2$ $\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k=0$ (v) $\forall p\in[\![0 ; n-1]\!]$, $(\omega_k)^p=(\omega_p)^k$

[[Démo :

]]

Rq : (i),(ii),(iii)⟹pour $n\in\mathbb{N}^*$ fixé, $\{\omega_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}} \;/\; k\in[\![0 ; n-1]\!]\}$ est un « groupe multiplicatif »

Ex 13 : résoudre dans ℂ : $X^5=1$

Ex 14 : Factoriser dans ℂ le polynôme $1+x+x^2+\ldots+x^n$

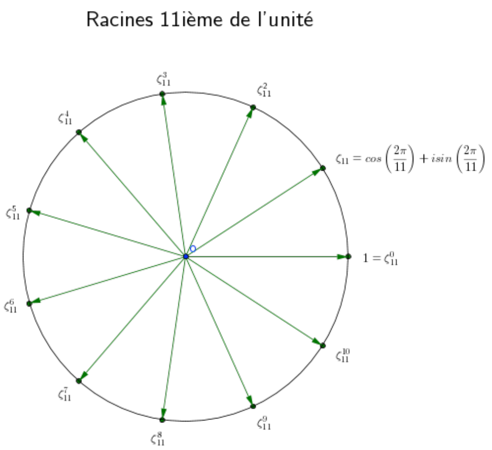
⟹Méthode Certaines équations polynomiales de degré n se résolvent par un changement de variable Z=… qui permet de se ramener à une équation $Z^n=1$.

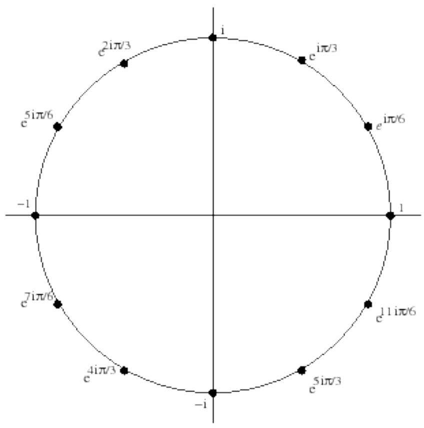
Ex 15 : résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^n=(1+z)^n$

c) Localisation géométrique des solutions :

Thm : Les images $(M_k)_{k=0,1,\dots,n}$ des complexes $(\omega_k)_{k=0,1,\dots,n}$ sont situés sur le cercle trigonométrique et constituent (pour n≥3) les sommets d'un polygone régulier à n côtés.

Ex : Racines 11-ièmes (n impair) et 12-ièmes (n pair) de l'unité :





Exercice 16 : Si on note w_k la racine n-ième de l'unité, $w_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, (i) calculer : $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{w_k}$

ii) Prouvez $\sum_{p=0}^{n-1}\left(\frac{1}{w_k}\right)^p=\sum_{p=1}^{n}(w_k)^p$

d) Application HP : racines n-ièmes d'un nombre complexe

Ex 17 : Résoudre a) $Z^5=2$ b) $Z^6=1+i$